线性代数讲义

张云凌

参考教 材: *山东大学数学院<线性代数>*

目录

线性代数讲义
目录
第一章:行列式
§ 1.1 行列式的概念
§ 1.2 n阶行列式
§ 1.3 特殊行列式的计算
§ 1.4 行列式的性质
§ 1.5 行列式的计算
§ 1.6 克莱姆法则
§ 1.7 范德蒙行列式*
§ 1.8 逆序数与行列式*
§ 1.9 行列式展开定理*
第二章:矩阵
§ 2.1 矩阵的概念
§ 2.2 几个特殊的矩阵
§ 2.3 矩阵的运算
§ 2.4 方阵的行列式
§ 2.5 伴随矩阵
§ 2.6 矩阵的初等变换
§ 2.7 矩阵的秩
§ 2.8 初等矩阵
§ 2.9 逆矩阵的定义及可逆条件
§ 2.10 分块矩阵*
§ 2.11 矩阵方程(矩阵的应用)
§ 2.22 矩阵习题
第三章:n维向量
§ 3.1 n维向量及线性运算
§ 3.2 向量组的线性相关性
§ 3.3 相关性的判定定理
§ 3.4 极大无关组与秩的定义
第四章:线性方程组

第一章:行列式

§ 1.1 行列式的概念

引例1:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

如果$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.这个方程组就一定有解,至于为什么,以后来说

根据高斯消元法,得到两个解:$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$ $x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

可以看到上面有很多ab-cd的形式,所以,我们引入了一个新运算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

我们有了这个概念之后,我们上面的两个解就可以很方便的表示出来

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

我们再来讨论解存在的条件,看到x_1和x_2的解的分母都是$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,那么我们只要保证分母不为0就可以把他的解算出来

即:只要$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,方程组有解,这一点我们在以后还会说到

这样就非常好记忆,这种两行两列的运算,我们就把他叫做二阶行列式,所以,我们可以看到,行列式就是一个速记符号

引例2:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

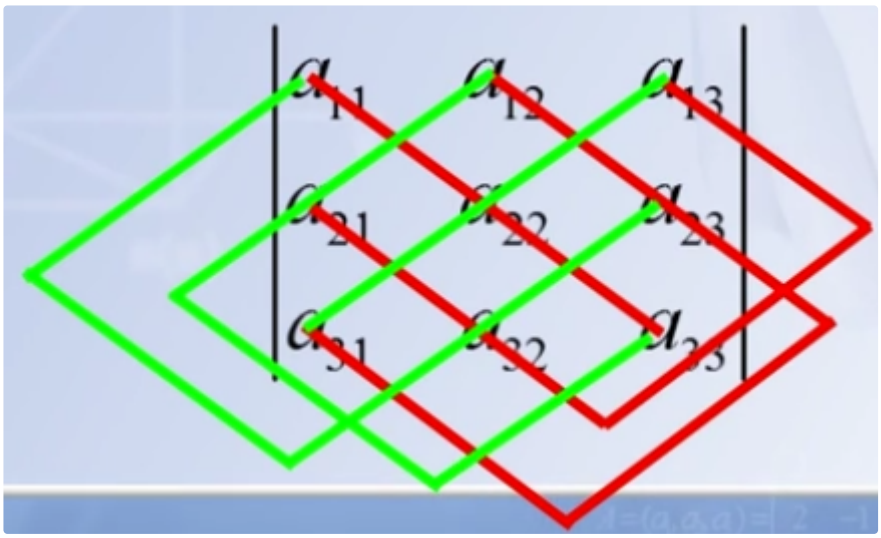
我们用高斯消元法来解这个题目,具体过程就不说了,最后得到三个解的分母都是

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

我们把这六个式子定义一个新运算

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

这就是三阶行列式,那我们如何记住这个运算呢,我们分析一下,这是六项代数和,我们看行标都是123,列标正好是123这三个数的全排列,每一项中的元素都取自不同行不同列,这里给个图方便读者记忆



eg:

$$1.\ \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -80$$

$$2.\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

§ 1.2 n阶行列式

前面有了二阶和三阶行列式,那么我们如何定义n阶行列式呢?

先来看下面的例子

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$=a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)+a_{12}\left(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)$$
$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

请读者观察规律,和a_{11}相乘的行列式是把第一行第一列划掉的行列式,

和a_{12}相乘的行列式是把第一行第二列划掉的行列式,

和a_{13}相乘的行列式是划掉第一行第三列的行列式

相信读者已经发现规律了,那么再观察前面的符号,这里再写明白点相信读者就可以观察到了

上面的式子$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$

读者可以看到实际上符号是由行标+列标的和决定的,这里为了表示方便,我们引入一个符号

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix},A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

我们把A_{ij}称为元素a_{ij}的代数余子式,例如A_{11}就是a_{11}的代数余子式,在本题中,$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$

但如果单独拿出$M_{ij}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$就是$a_{11}$的余子式

那么三阶行列式就可以写成$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$

我们这里取得都是第一行,类似的,我们其实可以取任意一行,即

$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}$,当$i$等于$1,2,3$时都成立

至于为什么请读者自己思考

eg:

$\begin{vmatrix}1&0&0\\-5&2&3\\3&3&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3\\3&5\end{vmatrix}$,由上方定理,可以按照第一行展开

写出$\begin{vmatrix}1&4&-8\\-5&2&9\\3&6&1\end{vmatrix}$第二行第三列的余子式和代数余子式

划去第二行和第三列后,剩下的就是$\begin{vmatrix}1&4\\3&6\end{vmatrix}$,这就是这个第二行第三列的余子式

代数余子式就是在余子式的基础上乘以一个1或-1,第二行第三列就乘以$(-1)^{2+3}=-1$

所以代数余子式就是$-\begin{vmatrix}1&4\\3&6\end{vmatrix}$

那么一般的行列式长这样:

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

一般行列式第i行第j列的余子式为:

$$M_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1(j-1)}&a_{1(j+1)}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{(i-1)1}&\cdots&a_{(i-1)(j-1)}&a_{(i-1)(j+1)}&\cdots&a_{(i-1)n}\\a_{(i+1)1}&\cdots&a_{(i+1)(j-1)}&a_{(i+1)(j+1)}&\cdots&a_{(i+1)n}\\\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n(j-1)}&a_{n(j+1)}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

看起来很麻烦，但是说白了，就是没有第i行和第j列后剩下元素拼起来的行列式

一般行列式余子式和代数余子式的关系满足：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

那么这里n阶行列式的定义就出来了

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots n)$$

$$\text{或}：D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

第一种我们称为按行展开，第二种我们称为按列展开

§ 1.3 特殊行列式的计算

这里给出几个特殊行列式的计算

1. 角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（未写出的为0）

这种只有主对角线上的元素不为0，其余元素都为0的行列式的值就是$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，也就是对角线相乘

2. 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（未写出元素均为0）

形如这种只有主对角线下方或者主对角线上方有元素的行列式我们称为三角行列式

三角行列式的值也是主对角线元素乘积，即：$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

3. 斜三角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & \cdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & \\ \vdots & \cdots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

（没写出的元素都是0）

形如这种只有副对角线上有元素，其余都是0的行列式我们叫做斜三角行列式

这个行列式的值为$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$

至于为什么是这个值，请读者自行思考

给个例子：

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & & \\ 0 & x & y & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & x & y & 0 \\ 0 & & & 0 & x & y \\ y & & \cdots & & 0 & x \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} x & y & & & \\ & x & y & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & y \\ & & & & x \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & & & \\ x & y & & \\ & \ddots & y & \\ & & x & y \end{vmatrix}=x^n+(-1)^{n+1}y^n$$

§ 1.4 行列式的性质

行列式的转置

首先我们看一下一般行列式长啥样：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

我们简单做个变换

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

请读者观察我是怎么变换的，这里我把第一行做了第一列，第二行做了第二列，第n行做了第n列

如果读者无法理解，是如何变换的，实际上也可以理解为行列式所有元素关于主对角线对称

我们通过这种行变列，列变行的运算后得到的行列式我们就称为行列式的转置行列式，记作D^T

这里有一个结论$D=D^T$，也就是说，行列式和他的转置行列式值相等

同时我们也不难发现，行列式中行和列地位是相等的，对行成立的性质对列也成立

性质1：$D=D^T$

性质2：互换两行，行列式变号

证明：

这里以三阶行列式为例

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix} \\ &=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \\ D_1&=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{matrix} a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32} \\ -a_{11}a_{22}a_{33}-a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{23}a_{31} \end{matrix} \\ &=-a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

正相差一个负号

性质2推论1：行列式中如果有两行元素完全相同，行列式值为0，这个推论非常显然，不做证明

性质2推论2：$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=0 \quad (i\neq j)$，换句话说，行列式中第i行元素和第j列元素的代数余子式相乘，如果i等于j，得到的就是行列式的值，如果i不等于j，得到的结果一定是0，对行成立，对列也成立，这里不多赘述，至于证明，可以反推一下，只有两行元素相同的时候按行展开才会出现这种运算

这里就有了一个等式：$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=\begin{cases} D, & (i=j). \\ 0, & (i\neq j). \end{cases}$

同理，对列也成立：$a_{1j}A_{1i}+a_{2j}A_{2i}+\cdots+a_{nj}A_{ni}=\begin{cases} D, & (i=j). \\ 0, & (i\neq j). \end{cases}$

性质3：用常数k乘以一个行列式中的任意一列等于用k乘以整个行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明很简单，只需要按行展开即可

性质4：行列式某一行元素加上另一行元素的k倍，行列式的值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质5：若行列式某一行的元素是两数之和，则行列式可拆成两个行列式的和。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+b_1 & \cdots & a_{in}+b_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

总结一下本节给到的性质

1. $D = D^T$
2. 互换两行,行列式变号
3. 用常数k乘以一个行列式中的任意一列等于用k乘以整个行列式
4. 行列式某一行元素加上另一行元素的k倍,行列式的值不变
5. 若行列式某一行的元素是两数之和，则行列式可拆成两个行列式的和。

推论：

1. 行列式中如果有两行元素完全相同,行列式值为0,这个推论非常显然,不做证明
2. $a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0 \quad (i \neq j)$,

§ 1.5 行列式的计算

对于多阶行列式而言,我们手算起来其实是很复杂的,那么本节就来说说如何用上一节中的行列式的性质来把一般行列式变得更好做的行列式

我们给第一个例子 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

如何计算这个行列式呢?我们观察一下规律,如果我们把所有的行加到第一行,第一行的元素是不是就一样的了?并且由上一节的性质4,行列式的值不变

那么这个行列式等于 $\begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

由上一节的性质3,我们可以把第一行的9提出来

行列式的值 $= 9\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

我们再考虑使用上一节给到的性质4把第一行乘以 -2 分别加到第二行第三行和第四行

$$9\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

我们再来看一个题：

$$n\text{阶行列式}\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}\text{的值为?}$$

$$\text{我们把所有的行都加到第一行,然后再拿到行列式外面,得到的就是}(a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\text{然后我们用第一行的}1\text{乘以}-b\text{加到下面的所有行,下面所有的}b\text{就都是}0\text{,主对角线全部都是}a-b\text{,一共有}n-1\text{个}a-b$$

$$\text{所以这个行列式的值为:}(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

这种题目很重要,也请读者牢记这种方法

我们给一个四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\text{对于这种题,我们有两种思路}$$

$$\text{第一种就是用性质转换成三角行列式}$$

$$\text{第二种就是按行或列展开,当然我们需要选定}0\text{比较多的行,我们也需要造一些}0\text{出来方便计算}$$

$$\text{我们最常用的第二种,第一种算法主要用在下一章的矩阵化简}$$

$$\text{所以我们这里也用第二种算法}$$

$$\text{我们在第二列造一些}0\text{最后得到:}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -8 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 16 & 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\text{然后按第二列展开,这就很简单了,最后结果为}40$$

§ 1.6 克莱姆法则

在本节我们将会涉及到行列式和线性方程组的关系,本节我们涉及到的方程组具有一定局限性,本节涉及到的方程组均是n个未知数,n个方程的方程组,形如:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

我们称为n元一次线性方程组,和 § 1.1 中的两个引例一样,我们也可以用行列式来轻松表达这个方程的解

我们先来回顾一下二元一次线性方程组的解:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases}$$

$$\text{如果}a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0.\text{这个方程组就一定有解,至于为什么,以后来说}$$

$$\text{根据高斯消元法,得到两个解:}x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

我们看到分母都是$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,可以看出,这就是方程系数按位置组成的行列式,我们称为系数行列式,在这里表示为D,第一个解的分子是用方程右边的常数项替换掉系数行列式的第一列,我们表示为D_1,第二个解的分子是用方程右边的常数项替换掉系数行列式第二列,我们表示为D_2,相信读者已经发现规律了

我们这里给一个结论:如果系数行列式D≠0,这个方程组有唯一解,

$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}\quad(D_n\text{为方程组的常数项替换掉系数行列式的第}n\text{项})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

这种右边都是0的方程组我们叫做其次方程组

如果系数行列式不为0,他只有唯一解,显然这个解是0

当系数行列式不为0的时候,方程组有非0解

> 总结一下本节的定理:
> 定理1:如果系数行列式D≠0,这个方程组有唯一解
> $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$ $(D_n$为方程组的常数项替换掉系数行列式的第n项$)$
>
> 定理2:其次方程组有非0解的充要条件是系数行列式=0

§ 1.7 范德蒙行列式*

范德蒙行列式是一个特殊的行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

这种行列式我们就叫做范德蒙行列式,范德蒙行列式的下一行的元素在上一行的基础上指数+1

换句话说,n阶范德蒙行列式由n个元素组成,每一个元素占1列,每一列元素按升幂排列(幂指数为等差数列)

那么n阶范德蒙行列式的结果是

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j)$$

实际上就是:

$$\begin{aligned} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \\ (a_3 - a_2)\cdots(a_n - a_2) \\ \cdots(a_n - a_{n-1}) \end{aligned}$$

看起来很复杂,但很好记忆,他一共有$\frac{n(n-1)}{2}$项连乘

怎么来记呢,我们只关注第二行,选定第二行第一列的元素,用这个元素后面的所有的项都去减第二行第一列,再选定第二行第二列,让这个元素后面所有的项都去减这个元素,这样依次类推,选定第二行第n列,用这一个元素后面所有的元素去减这个元素,最后把这些元素乘起来就行了,我们看个例题

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 9 & 16 \\ 8 & 1 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

做题的时候不会告诉你是范德蒙行列式,但希望读者能通过定义来识别范德蒙行列式

这个题的结果为:

选定第二行第一列,用后面的元素减他:$(1-2)(3-2)(4-2)$

选定第二行第二列,用后面的元素减他:$(3-1)(4-1)$

选定第二行第三列,用后面的元素减他:$(4-3)$

然后把这些元素全部乘起来,得:$(1-2)(3-2)(4-2)(3-1)(4-1)(4-3) = -12$

§ 1.8 逆序数与行列式*

我们在这里节中会用另一个方式来定义行列式

首先介绍全排列

n个不同的元素排成一列，称为n个元素的全排列。如： 12345678， 76532184，等等均为8个元素的全排列

n个元素的全排列一共有n!个

然后介绍一下逆序数

在n级排列中,有一个排列最为特殊,12345...n,这样依次递增的排列称为标准排列,这个顺序就是标准顺序,如果有任意两个元素没有按照标准顺序排列,即,小的数在大的数后面,就称这是一个逆序

比如说213这是三个元素的全排列,2后面有1个比他小的,1后面没有比他小的,所以他的逆序数就是1,读者也看到了,逆序数就是逆序数量的总和

逆序数为偶数的我们叫做偶排列,逆序数为奇数我们叫做奇排列,在n个元素的全排列中,奇排列和偶排列数量相同,并且调换排列中的两个元素,奇偶性会发生改变,我们把这种交换两个元素的行为叫做对换

再来看一下三阶行列式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

可以看到这六项的行标都是标准排列,列标就是123这三个元素所有全排列,至于正负号就是由排列的奇偶性决定的,偶排列前面就是正号,奇排列就是负号

那么这里有了行列式的新定义:

$$n\text{阶行列式}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{N(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$
$$\text{其中}N(j_1)\text{为}j_1\text{的逆序数}$$

§ 1.9 行列式展开定理*

行列式按行列展开也叫拉普拉斯展开,我们最初为了方便理解是用他来定义行列式的,但上一节中的定义才是行列式真正意义上的定义,拉普拉斯展开其实是一个定理

证明:
设B是一个 $n\times n$ 的矩阵， $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ 。为了明确起见，将 M_{ij} 的系数记为 (a_{st})，其中 $1\leq s,t\leq n-1$ [3]
考虑B的行列式|B|中的每个含有 b_{ij} 的项，审的形式为:

$$\operatorname{sgn}\tau b_{1,r(1)}\cdots b_{i,j}\cdots b_{n,\tau(n)}=\operatorname{sgn}\tau b_{ij}a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n-1,\sigma(n-1)}$$

到 :
定义 $\sigma'\in S_n$ 使得对于 $1\leq k\leq n-1,\sigma'(k)=\sigma(k)$ 并且 $\sigma'(n)=n$, 于是sgn\sigma' $=\operatorname{sgn}\sigma_0$ 然后

$$\tau=(n,n-1,\ldots,i)\sigma'(j,j+1,\ldots,n)$$

由于两个轮换分别可以被写成 $n-i$ 和 $n-j$ 个对换，因此

$$\operatorname{sgn}\tau=(-1)^{2n-(i+j)}\operatorname{sgn}\sigma'=(-1)^{i+j}\operatorname{sgn}\sigma$$

因此映射$\sigma\leftrightarrow T$是双射。由此:

$$\sum_{\tau\in S_n:\tau(i)=j}\operatorname{sgn}\tau b_{1,r(1)}\cdots b_{n,\tau(n)}=\sum_{\sigma\in S_{n-1}}(-1)^{i+j}\operatorname{sgn}\sigma b_{ij}a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n-1,\sigma(n-1)}=b_{ij}(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

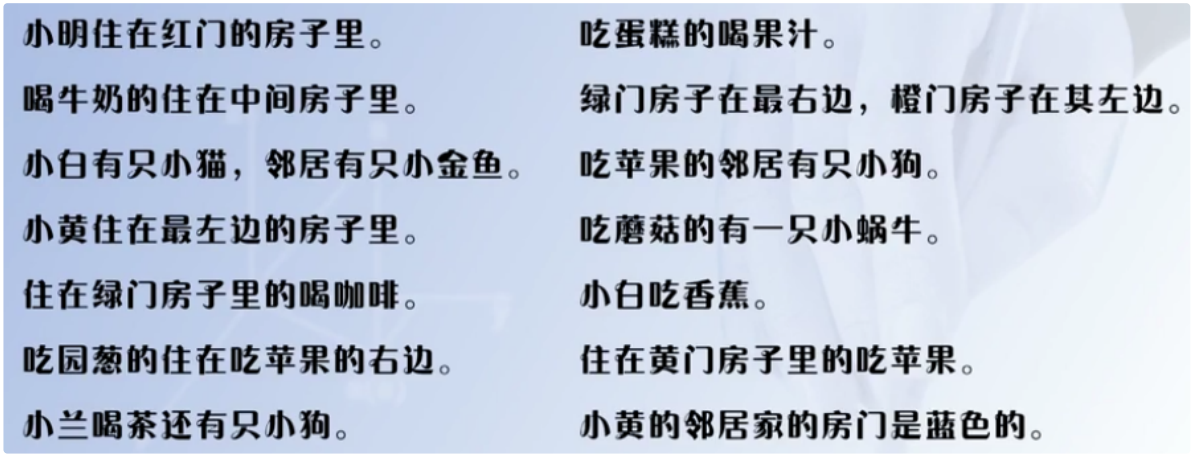
第二章:矩阵

§ 2.1 矩阵的概念

先看一个好玩的引例,看图

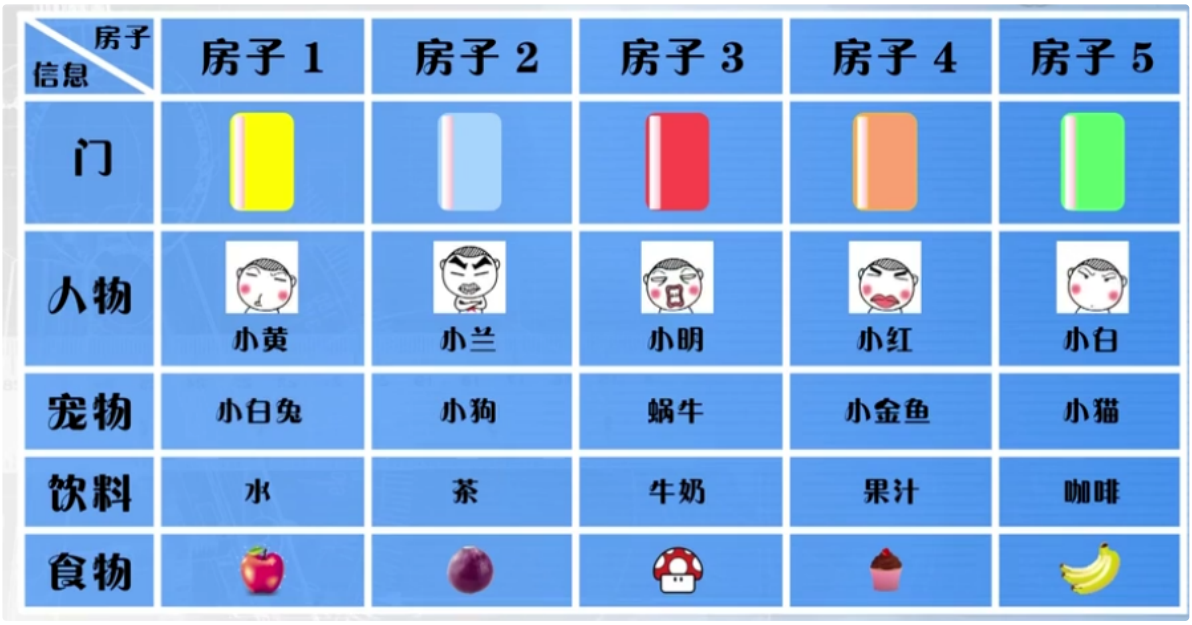


如果把这几个属性随机排列,读者一定知道一共有5^5种可能,但我加一点条件



请问谁喝水?谁有只小金鱼?请读者思考

这里把答案给读者



我们要描述这样一个信息，一定要用到一张数表，否则就很难描述，当然我们现实生活中还有很多数表，例如股票呀，航班呀，列车信息呀，这些都是图标，如果我们把这些表中的这些事项去掉，只抽象出数字出来，就得到了一个矩阵的数表，这些数表就是矩阵，所以，矩阵本质上一张可以表示数据的数表

$$m\text{行}\ n\text{列矩阵：}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{也可以记作：} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中a_{ij}表示这个元素位于第i行第j列，元素都是实数的矩阵又称为实矩阵，当然，本课也只讨论实矩阵，矩阵一般用ABC表示

只有一行的矩阵称为行矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

只有一列的矩阵称为列矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

§ 2.2 几个特殊的矩阵

方阵：行数和列数相同的矩阵，我们称为方阵

方阵因为是方的，所以和行列式一样，也有主对角线和斜对角线(在行列式中这条对角线称为副对角线)，其中左上到右下就是主对角线，右上到左下就是斜对角线，其中主对角线上的元素行标和列表是相同的，请注意，只有方阵才有对角线这一说法

> 请读者区分开矩阵和行列式，矩阵是一张数表，行列式是一种运算，矩阵的形状是矩形，行列式的形状一定是正方形

零矩阵：所有的元素都是0的矩阵我们叫做0矩阵

$$O_{m\times n}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

对角阵：除了主对角线以外其他元素都是0

$$\wedge = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

> 请读者注意,对角阵有对角线,所以一定是方阵

单位阵:主对角线元素为1,其余元素都为0的矩阵

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

> 单位阵也必须是方阵,可以用E表示,也可以用I表示

数量阵:对角线的元素为一个常数,其余元素都为0的矩阵

$$\begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$$

> 数量阵也是方阵,并且我们也知道其实单位矩阵是一个特殊的数量阵

三角阵:主对角线上方的元素全为0或者主对角线下方的元素全为0的矩阵我们叫做三角阵

$$\text{上三角阵：} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\text{下三角阵：} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

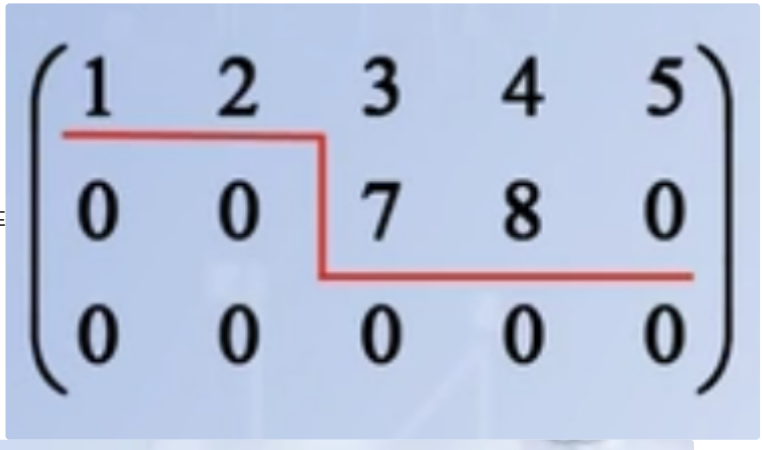
> 三角阵也一定是方阵

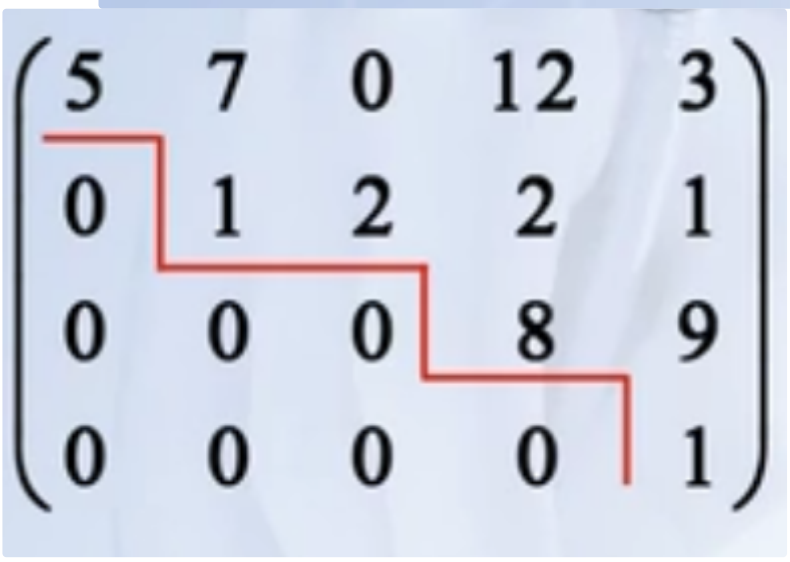
梯形阵:

梯形阵是我们用到最多的一个矩阵,这里需要详细介绍一下

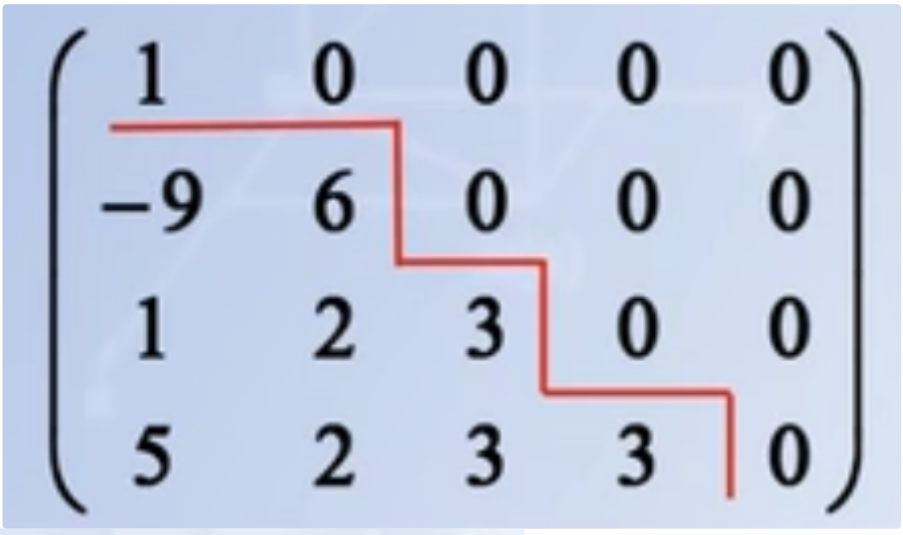
定义:设A是一个m行n列的非0矩阵,若非零行(至少有一个不为0的元素)全在零行上面,A中各非零行中的第一个(最后一个非零元素前(后)面零元素的个数随着行数的增加而增加(减少),则称为上(下)梯形阵

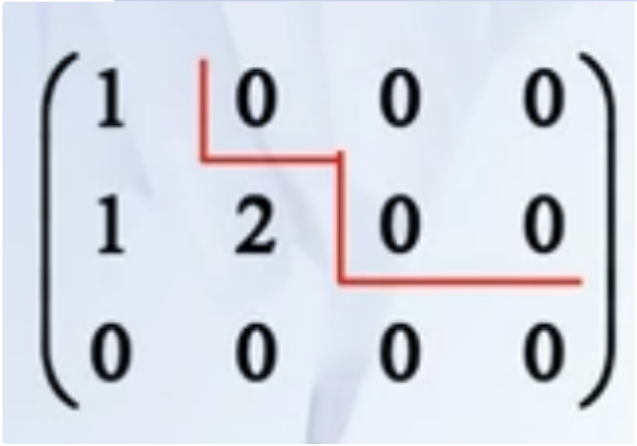
上梯形阵



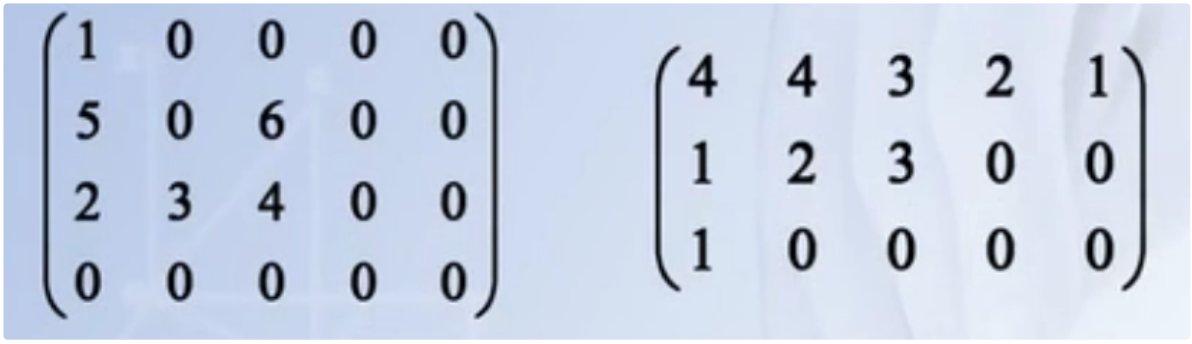


下梯形阵：





不是梯形阵的：



§ 2.3 矩阵的运算

介绍几个概念
矩阵的相等：如果两个矩阵有相同的行数和列数，并且对应的元素相等，则这两个矩阵相等
同型矩阵：如果两个矩阵的行数和列数相等，则为同型矩阵

加减法：
两个矩阵相加，是让这两个矩阵的对应元素相加减，很显然，只有同型矩阵才能进加减运算

矩阵的加减法满足一定的运算规律

- 交换律：A+B=B+A
- 结合律：A+(B+C)=(A+B)+C
- A+O=A=O+A
- A-A=O

> 简单补充一个概念
> 负矩阵：矩阵A的每个元素都乘以-1，得到的新矩阵为矩阵A的负矩阵，记作-A

数乘：
一个矩阵乘以一个常数就叫做数乘，矩阵的乘以一个常数就是用矩阵的每一个元素都乘以这个常数

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

$$-1A=-A$$

$$0A=O$$

> 请读者区分清楚矩阵和行列式：
> 一个数如果乘以一个行列式，等于这个数乘以这个行列式的某一行或者某一列，但一个数乘以一个矩阵，等于这个数乘以整个矩阵的每一个元素

矩阵的乘法也满足一些运算规律：

- k(A+B)=kA+kB
- k(lA)=(kl)A　(k和l均为常数)
- (k+l)A=kA+lA　(k和l均为常数)

矩阵乘法

看两个方程组：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2 \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2 \end{cases}$$

第一个方程组是x和y的关系，第二个方程组是x和t的关系

那么我们对这两个方程组进行组合，我们就有了y和t的关系

即：$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})\,t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})\,t_2 \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})\,t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})\,t_2 \end{cases}$$

我们可以认为第三个方程组是由第一个和第二个方程进行了一个特殊变换得来的

我们这里讨论的主要是方程的系数，所以我们把一个方程组的系数全部拿出来按位置排好就是他的系数矩阵

所以我们现在讨论的实际上是三个矩阵的关系

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

以上两个矩阵通过一种特殊的变换得到了 $\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$

我们把这种运算，叫做矩阵乘法

即：$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

那么我们把上面的规律抽象出来，给出矩阵乘法的运算规则
第一个矩阵的第n行和第二个矩阵的第m列对应相乘再相加，得到新矩阵的第n行第m列上的元素
例：A×B=C，则C的第1行第1列上的元素就是A的第一行元素和B的第一列元素对应相乘再相加，C的第n行第m列上的元素就是A的第n行和B的第m列上的元素对应相乘再相加

当然，有了上述运算规则，读者也不难发现，并不是所有矩阵都可以相乘，只有第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，才能做乘法运算，并且得到新矩阵的行数等于第一个矩阵的行数，新矩阵的列数等于第二个矩阵的列数
同样，也不难看出，矩阵其实并不满足乘法交换律

eg

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

求AB

A为2×2的矩阵，B为2×2的矩阵，显然可以相乘，并且结果为一个2×2的矩阵

结果为：$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

我们再算一下BA

结果为：$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

从上面的例题我们有两个结论：
一般情况下，矩阵不满足交换律，即：AB≠BA
AB=O 不能 推出A=O或B=O，或者说，两个非0矩阵相乘结果完全有可能是一个0矩阵

再给个例子：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}, AC = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$$

从上面例子我们也能看出，如果AB=AC，不能 推出B=C

由于矩阵乘法不满足交换律，所以，我们在代数里的一些要用到交换律的法则也就不成立了，但也不意味着所有运算规律都不满足

矩阵乘法满足下列规则：

$$
\begin{aligned}
&(AB)C = A(BC)\\
&A(B+C) = AB+AC\\
&(B+C)A = BA+CA\\
&k(AB) = (kA)B = A(kB)\\
&E_m A_{m\times n} = A = A_{m\times n}E_n
\end{aligned}
$$

> 请读者注意最后一条，可以看出，一个矩阵和单位矩阵相乘是满足交换律的，所以诸如平方差公式，完全平方公式等等，虽然对于两个普通矩阵是不成立，但如果两个矩阵中有一个矩阵是单位矩阵，就是成立的

eg:

$$
A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}
$$

求 AA

$$
\begin{bmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ 2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{bmatrix}
$$

方阵的正整数幂

这个知识点很简单

$A^k = AA\cdots A$

特别的：$A^0 = E$

$A^{k+l} = A^k A^l$

> 很显然，标题也说了只有方阵才会有正整数幂

请注意：$(AB)^k \neq A^k B^k$

只有当$AB = BA$时，才有$(AB)^k = A^k B^k$

矩阵的转置

矩阵的转置和方阵的转置类似，也就是把第n行放在第n列，换句话说A的第i行等于A^T的第i列，A的第j列等于A^T的第j行

$$
A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}
$$

$$
A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}
$$

> m行n列矩阵转置后为n行m列的矩阵，对角阵的转置还是他自己

矩阵转置的运算法则：

$$
\begin{aligned}
&\left(A^T\right)^T = A\\
&(A+B)^T = A^T + B^T\\
&(\alpha A)^T = \alpha A^T\\
&(AB)^T = B^T A^T\\
&(ABC)^T = C^T B^T A^T
\end{aligned}
$$

下面我们来证明一下$(AB)^T = B^T A^T$

$$
\begin{gathered}
\text{首先设}A\text{是一个}n\times m\text{的矩阵},B\text{是一个}m\times s\text{的矩阵}\\
A^T\text{是}m\times n\text{的矩阵},B^T\text{是一个}s\times m\text{的矩阵}\\
(AB)^T\text{是一个}s\times n\text{的矩阵},B^TA^T\text{也是一个}s\times n\text{的矩阵},\text{已经证明了他们是同型矩阵}\\
\text{接下来我们只需要证明}(AB)^T\text{的第}i\text{行第}j\text{列元素等于}B^TA^T\text{的第}i\text{行第}j\text{列元素}\\
(AB)^T\text{的第}i\text{行第}j\text{列的元素等于}AB\text{的第}j\text{行第}i\text{列元素等于}A\text{的第}j\text{行和}B\text{的第}i\text{列对应相乘再相加}\\
\text{而}B^TA^T\text{的第}i\text{行第}j\text{列的元素等于}B^T\text{的第}i\text{行和}A^T\text{的第}j\text{列对应相乘再相加}\\
B^T\text{的第}i\text{行},\text{也就是}B\text{的第}i\text{列},A^T\text{的第}j\text{列},\text{也就是}A\text{的第}j\text{行},\text{所以}B^TA^T\text{也是}B\text{的第}i\text{列和}A\text{的第}j\text{行对应相乘再相加}\\
\text{证毕}\#
\end{gathered}
$$

再说两个特殊的矩阵，对称阵和反对称阵

如果矩阵A满足A=A^T则称A为对称阵，很显然，A如果为对称阵，那么一定是方阵，并且A的所有元素关于主对角线对称

如果矩阵A满足-A=A^T则称A为反对称阵，很显然，A如果为反对称阵，那么一定是方阵，并且A的主对角线元素一定是0

我们来证明一个矩阵是对称阵

$$
\begin{gathered}
\text{证明}AA^T\text{是对称阵}\\
(AA^T)^T=AA^T\text{所以为对称阵}
\end{gathered}
$$

再给一个结论：任何一个方阵都可以写成一个对称阵和反对称阵的和，在工程上很有用
即：$A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$

eg

$$
\begin{gathered}
\text{设矩阵}A\text{与}B\text{为同阶对称阵，证明}AB\text{是对称阵的充要条件为}AB=BA\\
\text{充分性：已知}AB=BA\text{且}A\text{与}B\text{为同阶对称阵},\text{推}AB\text{为对称矩阵},\text{即}(AB)^T=AB\\
\text{已知}AB=BA,\text{则}(AB)^T=(BA)^T=A^TB^T=AB,\text{证毕}\\
\text{必要性},\text{已知矩阵}A\text{与}B\text{为同阶对称阵且}AB\text{是对称阵即}(AB)^T=AB,\text{证明}AB=BA\\
AB=(AB)^T=B^TA^T=BA,\text{证毕}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\text{证明}A^n=\begin{bmatrix}\cos n\phi & -\sin n\phi\\ \sin n\phi & \cos n\phi\end{bmatrix}\\
\text{数学归纳法：假设}A^{n-1}=\begin{bmatrix}\cos(n-1)\phi & -\sin(n-1)\phi\\ \sin(n-1)\phi & \cos(n-1)\phi\end{bmatrix}\\
\text{证明}A^n=\begin{bmatrix}\cos n\phi & -\sin n\phi\\ \sin n\phi & \cos n\phi\end{bmatrix}\\
A^n=A^{n-1}A=\begin{bmatrix}\cos(n-1)\phi & -\sin(n-1)\phi\\ \sin(n-1)\phi & \cos(n-1)\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos n\phi & -\sin n\phi\\ \sin n\phi & \cos n\phi\end{bmatrix}\\
\text{证毕}
\end{gathered}
$$

> 数学归纳法：第一步：证明n=1成立，第二步：归纳假设n=m时成立，证明n=m+1成立，如果两步都能证明，那么n取任何自然数都成立

§ 2.4 方阵的行列式

定义：由方阵A构成的行列式称为方阵的行列式，记作|A|
eg:

$$
|A|=\left|\begin{bmatrix}1&2&0\\1&0&8\\2&0&0\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1&2&0\\1&0&8\\2&0&0\end{vmatrix}=32.
$$

我们来看一个方阵的行列式

$$B=\begin{bmatrix}1&3&4\\2&6&8\\1&3&7\end{bmatrix}$$

读者可以自行计算一下$|B|$,最后结果是0

一个方阵的行列式为0时,我们认为这是一个很神奇的行列式,给他去了个名,叫做奇异方阵

同理,当一个方阵行列式不为0,他就是非奇异方阵

方阵的行列式满足以下两个性质:

$|kA|=k^n|A|$ $(n$为方阵阶数$)$

$|AB|=|A||B|$ $(AB$必须为同阶方阵$)$

eg

证明奇数阶反对称方阵的行列式为0

设A为奇数阶反对称方阵,即$A^T=-A$

$$|A|=|A|^T=|A^T|=|-A|=(-1)^n|A|=-|A|$$

$$|A|=-|A|,\text{即}|A|=0$$

证毕$\#$

§ 2.5 伴随矩阵

定义:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$A\text{的伴随矩阵为}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}\quad(A_{ij}\text{为}a_{ij}\text{的伴随矩阵})$$

记作A的伴随矩阵记作A^*

> 只有方阵才有伴随矩阵

请读者写出$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$的伴随矩阵

$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$的伴随矩阵为$\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

> 请读者记住上述例题中二阶方阵求伴随矩阵的公式,即,主对角线互换,斜对角线取反

我们给一个 很重要的公式

$AA^*=A^*A=|A|E$

证明:

$$AA^*=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$$

写到这里其实我已经证明了,如果读者还不清楚,请关注一下§ 1.5节的推论2,即串行展开值为0

$$\text{结果为:}\begin{bmatrix}|A|&0&\cdots&0\\0&|A|&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&|A|\end{bmatrix}=|A|E$$

推论:$|A^*|=|A|^{n-1}$ $(n为方阵阶数)$

$$
\begin{gathered}
由于AA^*=|A|E \\
两边取行列式得:|AA^*|=||A|E| \\
|A||A^*|=|A|^n \\
|A^*|=|A|^{n-1} \\
证毕\#
\end{gathered}
$$

§ 2.6 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换顾名思义,就是对矩阵的一种变换,有三种

第一种:交换两行或两列,交换第i行(列)和第j行(列)我们记作:$r_{ij}(c_{ij})$或$r_i \leftrightarrow r_j$ $(c_i \leftrightarrow c_j)$

第二种:用非0常数k乘以第i行(列),记作$kr_i(kc_i)$

第三种:把矩阵的第j行(列)乘以k倍加到第i行(列)对应元素上去,记作:r_i+kr_j (c_i+kc_j)

以上三种对矩阵的变换叫做初等变换,初等变换是线性代数中一个重要的工具

矩阵的初等变换可以简化矩阵,再具体一点,我们是要通过初等变换把矩阵变成梯型阵

eg

$$
\begin{gathered}
把A化为阶梯型矩阵 \\
A=\begin{bmatrix}2&-3&8&2\\2&12&-2&12\\1&3&1&4\end{bmatrix}\rightarrow(r_{13})\begin{bmatrix}1&3&1&4\\2&12&-2&12\\2&-3&8&2\end{bmatrix}\rightarrow(r_2-2r_1)(r3-2r_1)\begin{bmatrix}1&3&1&4\\0&6&-4&4\\0&-9&6&-6\end{bmatrix} \\
\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&1&4\\0&3&-2&2\\0&-3&2&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&1&4\\0&3&-2&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}
\end{gathered}
$$

特别注意,初等变化前后的矩阵是不相等的,所以不能用等号链接,一般用$\rightarrow$或$\cong$连接

读者注意上面的注意点,初等变换前后可以用$\cong$连接,这个符号明显是数学上的等价号,所以,我们给一个定义

如果A进行有限次的初等变换可以得到矩阵B,那么我们就说矩阵A和矩阵B等价,记作A$\cong$B

矩阵的等价是相互的,即A$\cong$B则B$\cong$A,矩阵等价也具有传递性,即A$\cong$B且B$\cong$C,则A$\cong$C

这里给一个非常有名的定理:任何一个矩阵都有一个等价标准型

$$
等价标准型矩阵:\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}
$$

我们来练习一下

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&2&-8&8\\-4&5&9&-9\end{bmatrix}$$

首先我们化成梯形阵

$$\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-4&4\\0&0&1&3\end{bmatrix}$$

接下来我们考虑化成等价标准型：$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$

> 细心的读者会发现，等价标准型1的个数等于梯形阵的非零行个数

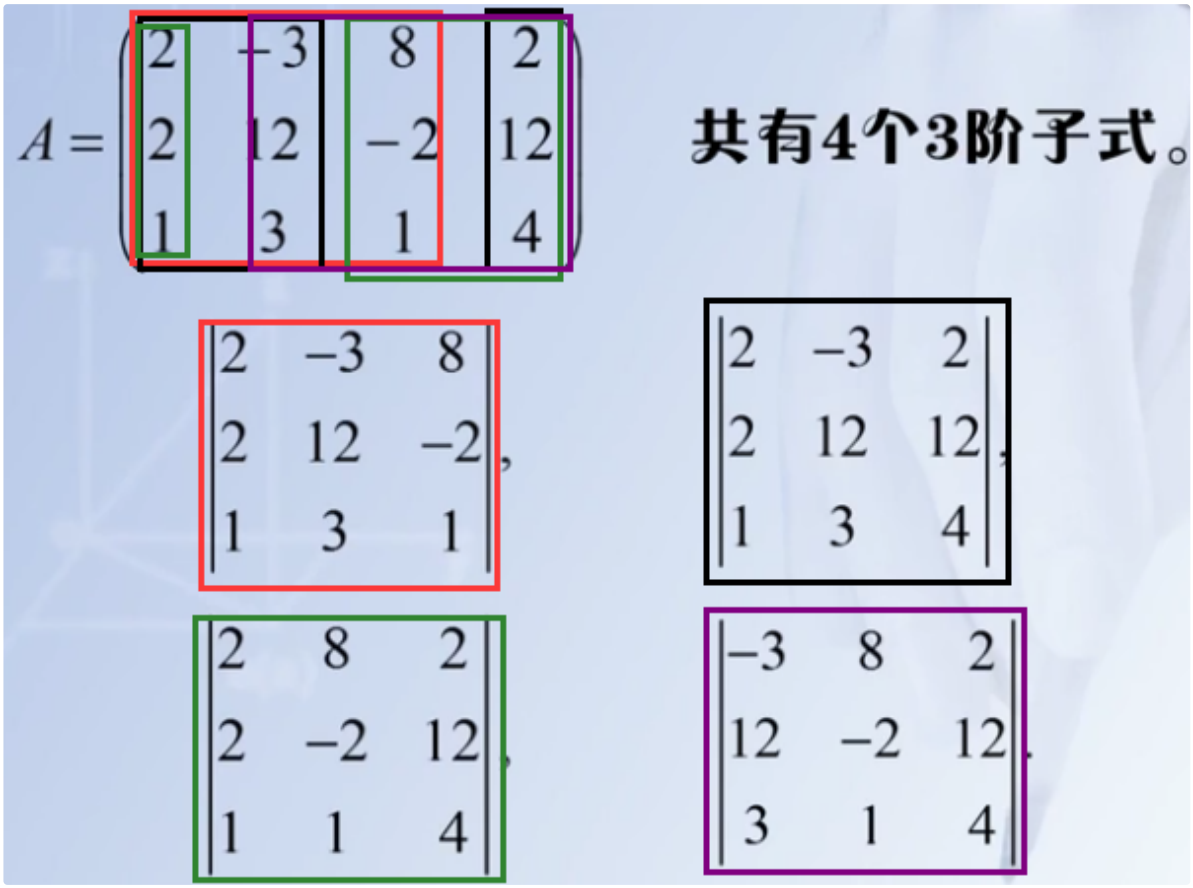
§ 2.7 矩阵的秩

介绍矩阵的秩之前，我们先引出一个概念：k阶子式

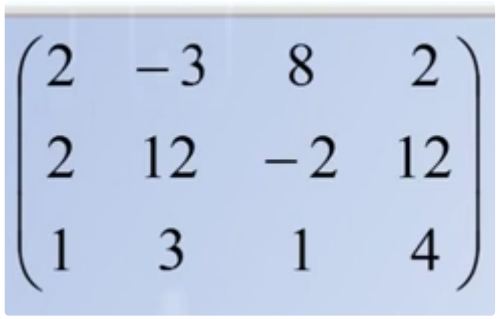
在矩阵$A_{m\times n}$中任取k行k列，位于这些行列相交处的k^2个元素，按次序排成的k阶行列式，就叫做k阶子式

一般的，$m\times n$矩阵有$C_m^kC_n^k$个k阶子式

> C_m^k为组合数，排列组合的内容，不展开讲，只提供算法：$C_m^k=\frac{m!}{k!(m-k)!}$



矩阵的秩：矩阵A `非0子式的最大阶数`，记作r(A)



这个矩阵的三阶子式都是0,而二阶子式,例如左上角四个,结果不为0,所以非0子式的最大阶数为2,即,这个矩阵秩为2

> r(O)=0,只要A不是零矩阵,那么r(A)>0,并且$r(A_{m\times n}) < min\{m,n\}$
>
> 对于n阶方阵A而言,如果$|A| \neq 0$则r(A)=n,我们称这种,若|A|=0,则r(A)<n

这个定义看起来很复杂,也确实不好用,所以我们求矩阵的秩不会用这个方法,这里给两个定理

1. 梯形阵的秩等于非0行的行数
2. 等价矩阵秩相等,或者说,初等变换不改变矩阵的秩

有了这两个定理,我们就可以用初等变换来求秩了

eq

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

梯形阵有2个非0行,所以矩阵秩为2

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & t & 3 & 12 \\ 3 & -1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

t为什么时,$r(C) < 3$

先化为梯形阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t+3 & 0 \end{bmatrix}$$

很显然,当第三行全为0的时候,$r(C) = 2 < 3$,即$t = -3$

根据上节给的结论:等价标准型1的个数等于梯形阵的非零行个数,而梯形阵的非零行个数又是矩阵的秩,所以我们有结论:等价标准型1的个数等于矩阵的秩,并且,如果两个矩阵有相同的秩,则这两个矩阵有相同的等价标准型,反之也成立,用数学语言表达就是:A和B等价的充要条件的$r(A) = r(B)$

满秩矩阵:如果一个方阵A的秩等于他的阶数,则称A为满秩矩阵,否则称为降秩矩阵
不难看出,满秩矩阵和非异矩阵是一回事,降秩矩阵和奇异矩阵是一回事

如果一个矩阵是满秩矩阵,他的等价标准型就是单位阵E

> A为n阶方阵,则:
> A为满秩矩阵 等价于 A为非奇异矩阵 等价于 |A|≠0 等价于 r(A)<n
> A为降秩矩阵 等价于 A为奇异矩阵 等价于 |A|=0 等价于 r(A)=n

§ 2.8 初等矩阵

定义:对单位阵进一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵

初等矩阵有三类:
E(i,j)即把第i行和第j行交换位置
E(i(k))即把第i行乘以一个k
E(i,j(k))即把第j行乘以k加到第i行

初等矩阵的性质:

$E^T(i,j)=E(i,j)$

$E^T(i(k))=E(i(k))$

$E^T(i,j(k))=E(j,i(k))$

> 初等矩阵转置后为同型矩阵

|E(i,j)|=-1
|E(i(k))|=k
|E(i,j(k))|=1

> 初等矩阵都是非奇异矩阵

初等矩阵和初等变换的关系

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\quad E(1,2)=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

我们把他们乘起来

$$E(1,2)A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

不难看出左乘了一个矩阵后,矩阵A其实是做了一个相应的初等行变换

$$AE(1,2)=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{12}&a_{11}&a_{13}\\a_{22}&a_{21}&a_{23}\\a_{32}&a_{31}&a_{33}\end{bmatrix}$$

也不难看出,右乘一个初等矩阵相当于做了一个相应的初等列变换

换句话说,我们要做初等行变换,先拿一个单位阵,把这个行变换作用在单位阵上,然后左乘到矩阵即可

> 推论1:满秩矩阵可以写成有限个单位矩阵的乘积
>
> 推论2:矩阵A与B等价的充要条件是存在m阶及n阶满秩矩阵P,Q,使得$B_{m*n}=P_0A_{m*n}Q_n$成立
> 同时可以得到:$r(A)=r(PA)=r(PAQ)=r(AQ)$
>
> 以上两个结论希望读者充分理解

eg:

$$设\ r(A_{4\times3})=2,B=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix},求\ \mathrm{r(AB)}$$

很显然,B是一个满秩矩阵,A右乘一个B,相当于做了有限次初等列变换,秩不变,即$r(AB)=r(A)=2$

§ 2.9 逆矩阵的定义及可逆条件

首先我们来引入逆矩阵的概念和定义

对于一般的代数而言
$\forall a\neq0,\exists a^{-1}$使得$aa^{-1}=a^{-1}a=1$

那我们就来思考一下,如果矩阵A不等于0,我们是否也能找到一个A^{-1}使得$AA^{-1}=A^{-1}A=E$

我们先看一个例子

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad 假如存在\ B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},使得\ AB=BA=E$$
$$经过计算,AB=\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix}$$
$$很显然,这个矩阵一定不会是单位阵E$$

> 由上面的例子我们也就能看出,并不是所有的方阵都可以找到这个矩阵

定义:对于n阶方阵A,若有n阶方阵B使得AB=BA=E,则称B为A的逆矩阵,并且称A为可逆矩阵

> A的逆矩阵记作A^{-1},读作"A逆",不能读作A的负一次方

- 逆矩阵是唯一的

$$证明:$$
$$设B\neq C且B和C都是A的逆矩阵$$
$$即,AB=BA=E且AC=CA=E$$
$$我们就有:B=EB=C(AB)=C(AB)=CE=C$$
$$由于假设里B\neq C,出现矛盾,假设错误$$
$$即一个矩阵的逆矩阵是唯一的$$

- 并不是每个非零方阵都是可逆的

接下来我们自然会想到两个问题,当一个方阵满足什么条件的时候可逆,当方阵可逆时,逆矩阵怎么求

首先我们上一节说了一个关于伴随矩阵的公式
$AA^*=A^*A=|A|E$
由于|A|是一个常数,所以咱们把|A|除过去,就得到$A\frac{A^*}{|A|}=E$,不难看出,A的逆矩阵就是$\frac{A^*}{|A|}$
显然,|A|做分母,一定不能为0,所以,只要|A|不为0
我们就有一个重要的公式:$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$
根据我们前面学过的结论,我们知道,|A|不为0,说明A一定要是非奇异矩阵,非奇异矩阵有一定是满秩的矩阵,满秩矩阵的等价标准型又一定是单位矩阵E,满秩方阵又可以写成一系列初等矩阵的乘积,这都是我们前面学过的

所以,前面两个问题我们其实已经解决了,
方阵可逆的条件为|A|不等于0
$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

> 推论:$|A^{-1}|=|A|^{-1}$
> 证明:
>
> $$AA^{-1}=E$$
> $$|AA^{-1}|=|E|=1$$
> $$|A||A^{-1}|=1$$
> $$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$
> $$证毕\#$$

> 我们又得到新的结论:$A可逆\Leftrightarrow A非奇异\Leftrightarrow A满秩\Leftrightarrow|A|\neq0$

eg

$$求A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}的逆矩阵$$
$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}}{ad-bc}$$

读者不难发现，我们之所以做二阶方阵的逆运算可以这么快，是因为我们可以很快求出二阶方阵的伴随矩阵，但对于高阶方阵而言，我们是很难求出他的伴随矩阵的，所以这个方法求逆矩阵只适用于二阶方阵

我们再来关注一下逆矩阵的一些性质

- $A_{\text{可逆}} \Longrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- $A_{\text{可逆}} \Longrightarrow A^{-1}{}_{\text{可逆}}$，且 $(A^{-1})^{-1} = A$
- $AB = E_{\text{或}}\ BA = E \Longrightarrow B = A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
  证明：
  $$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = E^2 = E$$
- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \quad (k \neq 0, A_{\text{可逆}})$

> 请读者注意，对于(A+B)$^{-1}$而言，我们是没有任何公式的

为了方便高阶矩阵的求逆运算，我们引入一个新的方法，初等变换法

先引入概念

$$A_{\text{可逆}} \Rightarrow A^{-1}{}_{\text{可逆}} \Rightarrow A^{-1}{}_{\text{满秩}} \Rightarrow A^{-1} = P_1P_1\cdots P_s$$
$$P_1P_1\cdots P_sA = E$$
$$P_1P_1\cdots P_sE = A^{-1}$$

我们可以看到，左乘一个初等阵相当于做了一个行变换，我们对A做s次行变换最后得到E，我们把这些行变换作用到单位阵E上，我们就可以得到A^{-1}

所以，我们只需要把A和E摆在一起，让A和E做同样的行变换，把A通过行变换化为E，就可以得到A^{-1}

具体怎么摆，其实也不难想：$[A \vdots E]$

我们把矩阵这么摆了以后，我们通过行变换把A化为A^{-1}，那么E被动的就化为了A^{-1}

eg:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\text{求 } A^{-1}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\text{我们就得到了 } A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

很显然，这种做法做高阶矩阵的逆运算会比用伴随矩阵公式简单很多

当然对于一些题目我们也是需要直接用定义求的

eg:

$$
\begin{aligned}
&1.\text{设 } A_n \text{满足 } A^2-A-2E=O,\text{求证 } A\text{可逆,并求 } A^{-1}\\
&A^2-A=2E\\
&A(A-E)=2E\\
&A\frac{(A-E)}{2}=E\\
&\text{即 } A^{-1}=\frac{(A-E)}{2}
\end{aligned}
$$

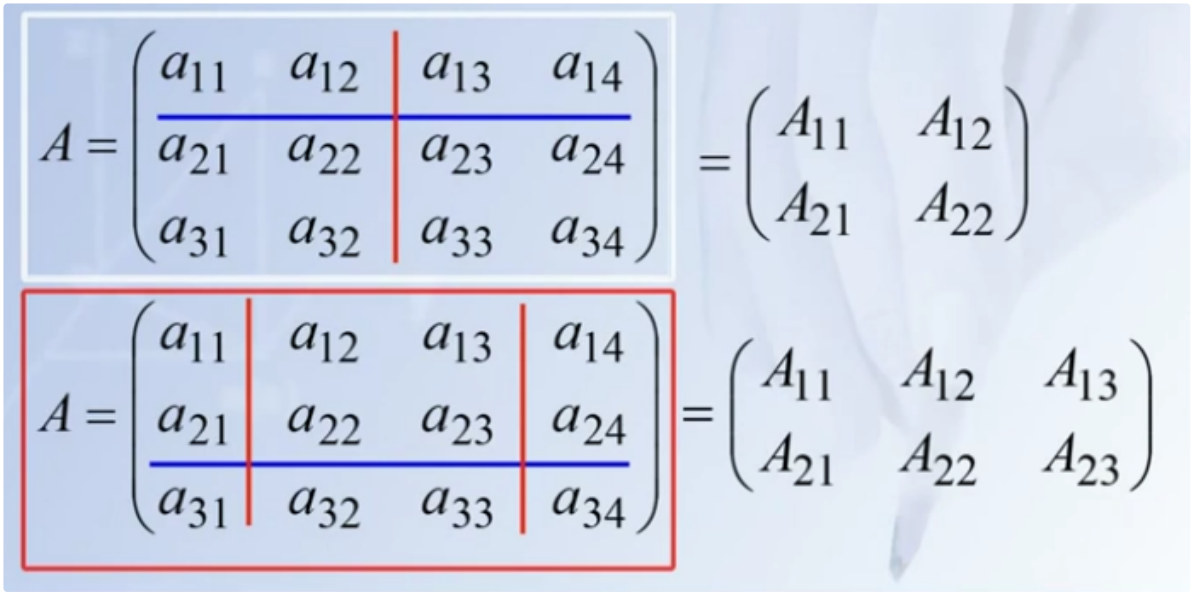
$$
\begin{aligned}
&2.\text{已知 } n\text{阶方阵满足 }:2A(A-E)=A^3,\text{求 } (E-A)^{-1}\\
&A^3-2A^2+2A=0\\
&(A^3-E^3)-(2A^2-2A)=-E\\
&(A-E)2A-(A-E)(A^2+A+E)=E\\
&(A-E)(A^2-A+E)=E\\
&\text{即 }:(E-A)^{-1}=A^2-A+E
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&3.\text{设 } A^k=O,\text{证明 } (E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}\\
&(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})\\
&=\left(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}\right)-\left(A+A^2+\cdots+A^{k-1}+A^k\right)\\
&=E-A^k=E
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&4.\text{已知 } AB\text{均为 } n\text{阶方阵,且 } E-AB\text{和 } E-BA\text{均可逆,证明 } (E-BA)^{-1}=E+B(E-AB)^{-1}A\\
&(E-BA)(E+B(E-AB)^{-1}A)\\
&=E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A\\
&=E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A\\
&=E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A\\
&=E-BA+BA=E\\
&\text{即 }:(E-BA)^{-1}=E+B(E-AB)^{-1}A
\end{aligned}
$$

§ 2.10 分块矩阵*

定义：
将矩阵用若干纵横直线分成若干个小块，每一小块称为矩阵的子块（或子阵），以子块为元素形成的矩阵称为分块矩阵。



分块矩阵的运算

线性运算：加法与数乘

乘法运算符合乘法的要求，即：保证第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数，且每次乘了之后里面的元素依然是一个矩阵，也要满足第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数

转置运算:大块小块一起转:

$$A^T=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}A_{11}^T & A_{21}^T\\ A_{12}^T & A_{22}^T\\ A_{13}^T & A_{23}^T\end{bmatrix}$$

特殊的分块矩阵

准对角阵(分块对角阵)

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_s\end{bmatrix}$$

$$A_i\text{为方阵(阶数可以不同)},i=1,2,3,\cdots,s$$

准对角阵的运算法则:

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_s\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}B_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & B_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & B_s\end{bmatrix}$$

$$(A_i\text{和}B_i\text{为同阶方阵},i=1,2,3,\cdots,s)$$

$$\text{我们有:}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}A_1+B_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_2+B_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_s+B_s\end{bmatrix}$$

$$kA=\begin{bmatrix}kA_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & kA_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & kA_s\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}A_1B_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_s\,B_s\end{bmatrix}$$

$$|A|=|A_1||A_2||A_3|\cdots|A_s|$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_2^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & A_S^{-1}\end{bmatrix}$$

$$r(A)=r\left(A_1\right)+r\left(A_2\right)+\cdots+r\left(A_s\right)$$

分块三角阵

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ O & A_{22}\end{bmatrix}\quad |A|=|A_{11}||A_{22}|\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\ O & A_{22}^{-1}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\quad |A|=|A_{11}||A_{22}|\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1} & O\\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1}\end{bmatrix}$$

分块斜对角阵

$$M=\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & B^{-1}\\ A^{-1} & O\end{bmatrix}$$

§ 2.11 矩阵方程(矩阵的应用)

$$AX=B,A\text{可逆},\text{求}X$$
$$A^{-1}AX=X=A^{-1}B$$

对于上面的例题,我们还可以用初等变换法

$$A^{-1}=P_1P_2\cdots P_s$$
$$P_1P_2\cdots P_sA=E$$
$$P_1P_2\cdots P_sB=X$$
$$\text{所以,我们有}[A\vdots B]\to[E\vdots X]$$

$$AXC=B$$
$$\text{这个很显然},X=A^{-1}BC^{-1}$$

eg:

$$1.\text{设}\ A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix},\quad\text{且}\ AX=A+3X,\quad\text{求}\ X.$$
$$\text{由}\ AX=A+3X,\text{得}\ (A-3E)X=A.$$
$$\text{解出}X=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$$
$$2.\text{设}\ B=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\text{且}A\left(E-C^{-1}B\right)^TC^T=B,\text{求}A$$
$$A\left(E-C^{-1}B\right)^TC^T=A\left(C-CC^{-1}B\right)^T=A(C-B)^T$$
$$\text{即}\ A(C-B)^T=B$$
$$\text{解得}:A=\begin{bmatrix}3&-1&0\\-3&3&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

§ 2.22 矩阵习题

$$1.\text{设}\ A,B\text{均为}n\text{阶方阵,且}\ A^2=A,B^2=B,(A-B)^2=A+B$$
$$\text{证明}\ AB=BA=0$$
$$\text{由}\ (A-B)^2=A+B$$
$$\text{得}:A^2-AB-BA+B^2=A+B=A^2+B^2$$
$$\text{即}:-AB-BA=0$$
$$\text{即}:AB=-BA$$
$$\text{要证}\ AB=BA=0,\text{只需要再证}\ AB=BA$$
$$AB=A^2B=AAB=-ABA=BAA=BA$$
$$\text{证毕}\#$$

$$2.\text{设 } A,B \text{均为 } n \text{阶方阵，且 } A^2-AB=E, r(AB-BA+2A)=?$$
$$\text{由：} A^2-AB=E, \text{得：} A(A-B)=E$$
$$\text{即：} A\text{可逆，且} A^{-1}=A-B$$
$$\text{又有} A(A-B)=(A-B)A=E$$
$$A^2-AB=A^2-BA=E$$
$$\text{有} AB=BA$$
$$\text{即} r(AB-BA+2A)=r(AB-AB+2A)=r(2A)=n$$

$$3.\alpha=(1,0,-1)^T, A=\alpha\alpha^T, \text{求 } A^n$$
$$\text{显然：} \alpha^T\alpha=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2$$
$$\text{故有：} A^n=\left(\alpha\alpha^T\right)^n=\alpha\alpha^T\cdot\alpha\alpha^T\cdots\alpha\alpha^T\cdot\alpha\alpha^T=\alpha\left(\alpha^T\alpha\right)\left(\alpha^T\alpha\right)\cdots\left(\alpha^T\alpha\right)\alpha^T$$
$$=2^{n-1}A$$

> 推广：
>
> $$\alpha_{n\times1},\beta_{n\times1}, A=\alpha\beta^T$$
> $$A^n=(\alpha^T\beta)A$$

第三章：n维向量

§ 3.1 n维向量及线性运算

定义：由 $a_1,a_2,a_3\cdots a_n$ 组成的有序数组，称为n维向量，简称为向量

向量通常由希腊字母$\alpha\beta\gamma$等表示

例：
$\alpha=(a_1,a_2,a_3\cdots a_n)$这种横着写的向量叫做行向量
$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$这种竖着写的向量叫做列向量不难看出，$(a_1,a_2,a_3\cdots a_n)^T=\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

> 向量实际上也可以看做一个矩阵

如果向量的所有元素都为0，那么这个向量就是一个0向量，对向量的每一个分量都添加一个负号，我们就得到原来向量的负向量

向量相等：当两个向量为同型(维数相同)，并且对应元素都相等，那么称他们两个向量相等

> 向量一般不区分横竖，横着写和竖着写是完全一样的，维度相同则同型

定义：向量$\alpha=(a_1,a_2,a_3\cdots a_n)$的长度为$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$，向量的长度也读作向量的，范数，模，记作 $\|a\|$

> 长度为0的向量必然为0向量
>
> 长度为1的向量称为单位向量
>
> 特别的：$e_1=(1,0,\cdots,0), e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)$都是n元标准单位向量

n维向量的线性运算

$$\alpha=(a_1,a_2,a_3\cdots a_n),\beta=(b_1,b_2,b_3\cdots b_n)$$
$$\alpha\pm\beta=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3\cdots a_n\pm b_n)$$
$$k\alpha=(ka_1,ka_2,ka_3\cdots ka_n)$$

线性组合

存在向量β和一个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,若存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\beta$
则称β可由向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示,或者说$\beta$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合

> 多个向量放在一起就叫做向量组

eg:

证明$\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1)$
证明α_3是α_2和α_1的线性组合
设$\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$
$$(4,1,-1)=k_1(1,2,-1)+k_2(2,-3,1)$$
即:得到$\begin{cases}4=k_1+2k_2\\1=2k_1-3k_2\\-1=-k_1+k_2\end{cases}$
解得:$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$

向量组的等价

若存在两个向量组:
$A=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$
$B=\beta1,\beta_2,\cdots,\beta_m$
若向量组A中的每一个向量都可以用B中的向量线性表示,则称向量组A可由向量组B线性表示
如果向量组A和B可以互相线性表示,则称向量组A和B等价

> 向量组等价具有自反性(自己和自己等价),对称性(等价是相互的),传递性(A与B等价,B与C等价,那么A与C的等价)

设$\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1)$
证明:$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$与$\{\alpha_1,\alpha_2\}$等价。
我们已经证明了α_3是α_2和α_1的线性组合

§ 3.2 向量组的线性相关性

定义

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,若存在一组不全为$0$的数$k_1,k_2,k_3,\cdots,k_n$
使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\mathbf{0}$,则称向量组线性相关
否则则称向量组线性无关

> 换个角度看,如果一个向量组的所有向量都不能由其他向量线性表示,那么这个向量组就线性无关,否则就线性相关

如果向量组有一个为0向量,那么这个向量组一定线性相关

eg:

讨论 $\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1)$ 的相关性。

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$$

得到一个方程组

$$\begin{aligned}k_1+2k_2+4k_3&=0\\2k_1-3k_2+k_3&=0\\-k_1+k_2-k_3&=0\end{aligned}$$

实际上我们只需要讨论这个方程组是否有非0解

如果有非零解，那么这个向量组线性相关，如果只有0解，说明线性无关

对于其次方程组而言，根据克莱姆法则，如果系数行列式不等于0，方程组有唯一零解，如果系数行列式等于0，方程组有非零解

系数行列式计算后为0，则方程有非零解，线性相关

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,$
$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，讨论向量组 $\beta_1,\beta_2,\quad\beta_3$，的相关性。

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$$

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$$

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 ，故得到方程组

$$\begin{aligned}k_1+k_3&=0,\\k_1+k_2&=0,\\k_2+k_3&=0.\end{aligned}$$

解出$k_1=k_2=k_3=0$

§ 3.3 相关性的判定定理

定理1：

向量组$a_1,a_2,\cdots,a_m(m\geq 2)$线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量可以由其他$m-1$个向量线性表示

证明：

必要性：

设$a_1,a_2,\cdots,a_m(m\geq 2)$线性相关

则一定存在一组不全为0的$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得$k_1a_1+k_1a_1+\cdots+k_ma_m=0$

由于系数不全为0，不妨假设$k_1\neq 0$，则$a_1=(k_2a_2-k_3a_3-\cdots-k_ma_m)\frac{1}{k_1}$

充分性：

不妨设$\alpha_1=k_2a_2+k_3a_3+\cdots+k_ma_m$

$-\alpha_1+k_2a_2+k_3a_3+\cdots+k_ma_m=0$

显然，a_1前面的组合系数为-1，不等于0，线性相关

证毕$\#$

看一个题：

判断题：向量组$a_1,a_2,\cdots,a_m(m\geq 2)$线性相关，则$a_1$可由$a_2,\cdots,a_m$线性表示

显然是错误的，定理说的是至少有一个，并没有说是哪一个

定理2：

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，而向量组$\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性相关，则$\beta$一定可以由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示，且表示式唯一

> 说大白话就是，如果一个向量组A线性无关，加上一个向量β后向量组就线性相关了，则β一定可以由向量组A中的向量线性表示

证明：

因为$\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性相关,则一定存在一组不全为0的数：$k,k_1,k_2,\cdots,k_m$使得$k\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$成立

假设$k=0$,则有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$必有非零解

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$只有零解

推出矛盾,假设不成立,在$k\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$中$k\neq 0$

由于$k\neq 0$,我们就得到$\beta=-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)\dfrac{1}{k}$

接下来证明表示式唯一

假设$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$

$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m$

两个式子相减得：$(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+\cdots+(k_m-l_m)\alpha_m=0$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,所以$(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+\cdots+(k_m-l_m)\alpha_m=0$只有0解

即$k_1=l_1,k_2=l_2,k_3=l_3\cdots$

证毕#

定理3：

若一个向量组中部分向量线性相关,则整个向量组线性相关

逆否命题:若一个向量组线性无关,则向量组中任何一个非空向量组也线性无关

证明:

若向量组$A=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关,则一定存在一个向量可以被其他向量线性表示

不妨设a_1可以表示为$k_2a_2+k_3a_3+k_4a_4+\cdots$

向量组$B=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\cdots,a_n(n>m)$

显然,向量组A是向量组B的部分向量

在向量组B中也有$a_1=k_2a_2+k_3a_3+k_4a_4+\cdots$

则B也为线性相关

证毕#

定理4：

m个n维向量组$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\,(i=1,2,\cdots m)$线性相关的充要条件是

由a_i构成的$m\times n$阶矩阵$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$

的秩$r(A)<m$

> 或者说:向量组排成一个矩阵,如果矩阵的秩小于向量组里向量的个数,那么就是线性相关
>
> 我们也知道:如果向量组的个数大于向量组的维数,向量组一定线性相关

eg:讨论$\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1)$相关性

排成一个矩阵：$A=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&-3&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}$

求得$r(A)=2<3$

我们就得到这个矩阵线性相关

所以我们要证明向量组线性相关有三种方式:

1. 求组合式,证明至少有一个向量可以由其他向量表示
2. 定义证明,组合系数不全为0
3. 将向量排成矩阵后秩小于向量组的个数

推论:m个n维向量线性无关的充要条件是矩阵A的秩=m,也就是向量的个数

推论:任意n个n维向量线性无关的充要条件是他们构成的行列式的值不等于0

定理4证明过程稍微有一点难,我懒得证了,读者自己去试着证明吧

定理5：

任意m个r维向量线性无关,那么对应的$r+1$维向量也线性无关,换句话说如果行列式线性无关,那么每个向量加上一个元素也线性无关

即:线性无关向量组添加分量也线性无关

§ 3.4 极大无关组与秩的定义

向量组$A=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中
如果向量组线性相关,且α_n可由前$n-1$个向量线性表示
则向量组$B=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$就和向量组$A$等价
这样我们找到了两个等价的向量组,但是向量组B比A少了一个向量
如果B也线性相关,我们又可以用这种办法去掉一个向量
到最后我总能得到一个线性无关的向量组C和向量组A等价
那么C就叫做向量组A的一个极大无关组

那么我们现在的问题就是如何把这个极大无关组找出来

首先我们给严格定义:

设向量组T中的部分向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足
$1.\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关
$2.T$中的向量均可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示
则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$T$的一个极大线性无关组,简称极大无关组

很显然,线性无关的极大线性无关组就是他本身

向量组和极大线性无关组等价

同一个向量组的极大无关组不唯一,但他们之间是等价的

极大无关组的性质

定理:

设有两个n维向量组
①$a_1,a_2,\cdots,a_r$
②$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$
若向量组①线性无关,且可由向量组②线性表示,则$r\leq s$

证明:

$$设A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_2&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{r1}&a_{r2}&\cdots&a_m\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\b_{s1}&b_{s2}&\cdots&b_{sn}\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_s\\\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_r\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_s\\o\\\vdots\\o\end{pmatrix}.$$

$$r(A)\leq r(C)\leq s$$

推论:

推论1:若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示,且$r>s$,则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关。
推论2:任意两个线性无关的等价向量组所含向量的个数相等

根据推论2,我们也就知道了
一个向量组的极大无关组可能不唯一,但任何两个极大无关组所含向量的个数一定是相同的,这也是一个重要的定理

那么这里我们又有了一个概念，极大无关组所含向量个数，我们把这个个数取一个名称，叫做向量组的秩，注意区分矩阵的秩

定义：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的极大线性无关组所含向量的个数称为向量组的秩，记作$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$

> 线性无关的向量组的秩等于向量组的个数
>
> 向量组线性无关 等价于 向量组的秩等于向量的个数

定理：$\begin{array}{l}\text{若 } \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \text{ 可由 } \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s \text{ 线性表示，则}\\ r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\end{array}$

> 请读者注意，两个矩阵等价 的等价描述为 两个矩阵的秩相同
> 但是我们只能说等价向量组的秩相同，不能说秩相同的两个两个向量组等价

向量组的秩的求法

矩阵的行秩和列秩：
行秩就是行向量组的秩.列秩就是行列量组的秩.
矩阵行秩的列秩是相等的，都等于矩阵的秩

推论：向量组的秩就和向量组所构成的矩阵的秩相等

eg

$$\text{求向量组的秩：}\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-2,2,0)$$
$$\text{咱们把他排成一个矩阵：}$$
$$\begin{bmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-2\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&2&2&-4\\0&3&3&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&-4\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$
$$\text{即秩为}3,\text{向量组的秩也就为}3,\text{并且我还知道他的极大无关组为}a_1,a_2,a_4,\text{至于为什么后面会说}$$

极大无关组的求法

列摆行变换法

把向量按列摆成矩阵，然后做初等行变换就可以做出来了，还拿上面那个例子

$$\text{求向量组的极大无关组：}\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-2,2,0)$$
$$\text{咱们把他排成一个矩阵：}$$
$$\begin{bmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-2\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&2&2&-4\\0&3&3&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&-4\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$
$$\text{这里我们把每一行的首非零元拿出来，也就是说把每一行的第一个不为的元素的列标拿出来，组成的就是他的一个极大无关组}$$
$$\text{即：第一行第一列，第二行第二列，第三行第四列，这三个元素都是首非零元，把他们的列标拿出来组成的就是极大无关组}$$

eg

λ为何值，向量组 $\alpha_1=(1,1,1,1,2),\alpha_2=(2,1,3,2,3),$
$\alpha_3=(2,3,2,2,5),\alpha_4=(1,3,-1,1,\lambda)$是线性相关？并求秩及一个极大无关组。

我们给他排成矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&1\\1&1&3&3\\1&3&2&-1\\1&2&2&1\\2&3&5&\lambda\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&2&1\\0&-1&1&2\\0&1&0&-2\\0&0&0&0\\0&-1&1&\lambda-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&2&1\\0&1&-1&-2\\0&1&0&-2\\0&1&-1&2-\lambda\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&2&1\\0&1&-1&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&4-\lambda\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\lambda\neq4$时，$r(A)=3<4$，向量组线性相关

向量组秩为3，极大无关组为a_1,a_2,a_3

$\lambda=4$时，$r(A)=4=4$，向量组线性无关

向量组秩为4，极大无关组为a_1,a_2,a_3,a_4

第四章：线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

形如这种右边常数项都是0的向量，称为其次线性方程组

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

我们把他们的系数拿出来，我们就得到了它的系数矩阵

我们把他们的未知数拿出来组成一个向量，我们就得到了他们的未知向量

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

关于线性方程组，我们一般有三种写法

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

以上写法叫做代数形式

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=O$$

以上写法叫做矩阵形式

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=O$$

以上形式叫做向量形式

我们主要关心线性方程组的求解，由于线性方程组未知数个数很多，我们这里都以向量的形式来描述他的解

显然,0一定是线性方程组的解,如果有一个非零向量也是他的解,我们就称它为非零解

我们主要研究非零解

由于我懒,剩下的又太简单了,所以这里只给出方程组解的求法

其次

- 写出系数矩阵
- 将系数矩阵通过初等行变换转化为阶梯型矩阵
- 将系数矩阵还原为线性方程组,该方程组为同解方程组
- 移项,将行首元素放在左边,其余的都作为自由未知量放到右边
- 自由未知量分别取一组线性无关的向量组带入,取得基础解系
- 将基础解系进行线性组合得到解

例 4.4.2 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

的通解.

解 对系数矩阵 A 施以初等行变换

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由此可知，$r(A) = 2 < 4$，所以方程组的基础解系中含 $4 - 2 = 2$ 个解向量. 由最后一个矩阵得原方程组的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - \frac{2}{7}x_4 = 0 \\ x_3 + \frac{5}{7}x_4 = 0 \end{cases}.$$

取 x_2，x_4 作为自由未知量，得原方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + \frac{2}{7}x_4 \\ x_3 = -\frac{5}{7}x_4 \end{cases}.$$

其中 x_2，x_4 为自由未知量.

令自由未知量 x_2，x_4 分别取值

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

可得原方程组的一个基础解系

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ 0 \\ -\frac{5}{7} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

因此，原方程组的通解为

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 = c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ 0 \\ -\frac{5}{7} \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 c_1，c_2 为任意常数.

非齐次线性方程组

- 写出曾广系数矩阵
- 将曾广系数矩阵化为行阶梯型
- 判断解的情况
- （无穷多解）
- 根据曾广系数矩阵还原线性方程组
- 将行首元素留在左边，其余的作为自由未知量挪到右边
- 自由未知量随意取值，得到一个特解
- 将原方程的导出组的同解方程组写出
- 将导出组的自由未知量取一线性无关的向量组，得到基础解系
- 线性组合基础解系，并在最后加上前面求出的一个特解

例 4.4.4 设非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases},$$

试用一个特解和其导出组的基础解系表示出通解.

解 对所给方程组的增广矩阵$\overline{A}$施以初等行变换

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -14 & 4 & 8 & 8 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

由此可得原方程组一般解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases},$$

其中 x_3，x_4 为自由未知量.

令 $x_3 = x_4 = 0$，得原方程组的一个特解

$$\alpha_0 = \begin{bmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

又因原方程组的导出组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{7}x_3 - \dfrac{13}{7}x_4 \\ x_2 = \dfrac{2}{7}x_3 + \dfrac{4}{7}x_4 \end{cases},$$

其中 x_3，x_4 为自由未知量.

令自由未知量 x_3，x_4 分别取值为

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

可得导出组的一个基础解系为

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{7} \\ \dfrac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{13}{7} \\ \dfrac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

于是原方程组通解为

$$\begin{aligned} \eta &= \alpha_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{13}{7} \\ -\dfrac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{7} \\ \dfrac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\dfrac{13}{7} \\ \dfrac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中 c_1，c_2 为任意常数.